Werner Krandick

Komplexe Nullstellen von Polynomen — Vergleich zweier unfehlbarer Methoden —

Für jedes Polynom A in einer Variablen mit komplexen Koeffizienten kann man beliebig kleine, disjunkte Rechtecke in der komplexen Zahlenebene berechnen, derart daß jedes Rechteck genau eine Nullstelle des Polynoms enthält und die Rechtecke zusammen alle Nullstellen enthalten; die Vielfachheit einer jeden Nullstelle kann ebenfalls berechnet werden.

Vor kurzem sind zwei Verfahren vorgeschlagen wurden, die diese Problemstellung im strengen Sinn lösen. Das Verfahren von Collins und Krandick [1] entstammt dem symbolischen Rechnen, das von Schaefer [2] der Intervallmathematik.

Wir untersuchen, wie sich die beiden Verfahren verhalten, wenn die Nullstellen von A nahe beieinander liegen. Während das symbolische Verfahren bei Annäherung an den Nullstellenhaufen einwandfrei funktioniert, wird das Intervallverfahren durch exponentielles Verhalten unpraktikabel.

1. Beschreibung beider Methoden

Ist ein Rechteck R in der komplexen Ebene gegeben, so zählt jede der beiden Methoden die Anzahl der Umläufe von $A(R)$ um den Ursprung. Nach dem Argumentsprinzip der Funktionentheorie ist die Umlaufzahl gleich der Anzahl der Wurzeln von A im Innern von R.

Die Verfahren unterscheiden sich in der Art, auf die sie die Umlaufzahl bestimmen. Das symbolische Verfahren verfolgt die Schnitte von $A(z)$ mit den Koordinatenachsen, während z das Rechteck durchläuft. Die Intervallmethode überdeckt $A(R)$ mit komplexen Intervallen, welche nicht den Ursprung enthalten.

Das symbolische Verfahren verwendet den größten Teil seiner Rechenzeit auf die Isolierung reeller Nullstellen bestimmter Polynome. Das gegebene Polynom $A(z)$ wird zunächst in der Form $A(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$ durch zwei reelle Polynome U und V dargestellt. Ist nun etwa $\{s\}\times]t_1,t_2]$ mit rationalen s, t_1, t_2 eine Kante von R, so werden die reellen Nullstellen der Polynome $U_s(y) = U(s,y)$ und $V_s(y) = V(s,y)$ im Intervall $]t_1,t_2]$ isoliert. Das geschieht durch die Methode der Koeffizientenvorzeichen, bei der die Vorzeichenregel von Descartes auf bestimmte Transformationen der Polynome U_s und V_s angewendet wird. Die Transformationen entsprechen Projektionen von Kantensegmenten S auf den Strahl der nichtnegativen reellen Zahlen. Wenn die Koeffizientenfolge eines transformierten Polynoms einen bzw. keinen Vorzeichenwechsel aufweist, so enthält S eine bzw. keine reelle Nullstelle.

Dagegen berechnet die Intervallmethode im wesentlichen Einschließungen C für die Wertemengen $A(S)$. Das geschieht durch die Auswertung der Mittelwertformel $C = A(mid(S)) + A'(S)(S - mid(S))$ unter Benutzung von Intervallarithmetik und des Horner-Schemas, wobei $mid(S)$ den Mittelpunkt von S bezeichnet.

Beide Verfahren unterwerfen also jede Kante K von R rekursiven Zweiteilungen. Das symbolische Verfahren unterteilt K solange in Segmente S, bis die Vorzeichenregel von Descartes auf S anwendbar ist. Die Intervallmethode unterteilt K solange in Segmente S, bis die Intervallauswertung von $C \supset A(S)$ den Ursprung nicht enthält. Wir vergleichen nun die beiden Methoden im Hinblick auf die erforderliche Rekursionstiefe und die Anzahl der betrachteten Kantensegmente S.

2. Ein Vergleich

In einem Experiment nähern wir die Kante eines Rechtecks einem Nullstellenhaufen und beobachten, wie sich die zugehörigen Bisektionsbäume bei den beiden Methoden entwickeln. Dazu wählen wir ein Polynom vierten Grades mit einem Nullstellenhaufen um den Punkt $1 + \frac{1}{2}i$, nämlich $A(z) = \prod_{k=1}^{4}(z - (1 + \frac{m_k}{1024}i))$, wobei $m_1 = 514$, $m_2 = 513$, $m_3 = 511$, $m_4 = 510$; wir betrachten die Kanten $\{s\}\times]0,1]$, wobei $s = 1 + 2^{-t}$ und $t \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Tabelle 1 zeigt, wie sich der Bisektionsbaum bei der Intervallmethode entwickelt. Mit jeder Halbierung des Abstandes der Kante vom Nullstellenhaufen steigt die Rekursionstiefe um 2, und die Anzahl der betrachteten Kantensegmente, d.h. der Knoten des Baumes, verdoppelt sich.

Tabelle 1. Bisektionsbaum der Intervallmethode

t	0	1	2	3	4	5	6
Tiefe	3	5	7	9	11	13	15
Segmente	7	21	63	145	301	627	1265
Umlauf in $\frac{\pi}{2}$	3	3	5	7	7	7	7

Das beobachtete Anwachsen der Rekursionstiefe läßt sich wie folgt erklären. Sei S ein Intervall mit Durchmesser 2^{-s}. Wird die Einschließung $C \supset A(S)$ mit der Mittelwertformel berechnet, so ist der Überschuß von C proportional zu 2^{-2s}. Wenn nun S den Abstand 2^{-t} von einem Haufen von n Nullstellen hat, dann ist die Distanz zwischen $A(S)$ und Ursprung proportional zu 2^{-nt}. Daß der Überschuß von C kleiner ist als der Abstand von $A(S)$ zum Ursprung, ist also erst für $s \geq nt/2$ erwarten. In unserem Experiment ist $n = 4$, und die Rekursionstiefe wächst tatsächlich wie $2t$.

Bei der symbolischen Methode gibt es zwei Bisektionsbäume zu beobachten, einen für die Bestimmung der reellen Nullstellen von U_s und einen für V_s. Tabelle 2 listet die Anzahl der jeweils gefundenen Nullstellen; diese Anzahl ist beschränkt durch den Grad von A. Auch die Anzahl der jeweils notwendigen Bisektionen ist aufgeführt. Hier gibt es kein exponentielles Anwachsen. Nachdem die reellen Nullstellen von U_s und V_s isoliert sind, müssen die isolierenden Intervalle zur Bestimmung der relativen Anordnung der reellen Nullstellen von U_s und V_s weiter verfeinert werden. Die Anzahl der hierzu erforderlichen Bisektionen wird ebenfalls aufgeführt.

Tabelle 2. Bisektionsbäume der symbolischen Methode

t	0	1	2	3	4	5	6
Nullstellen von U_s	2	2	2	4	4	4	4
Bisektionen für U_s	1	1	1	3	5	7	9
Nullstellen von V_s	1	1	3	3	3	3	3
Bisektionen für V_s	0	0	1	1	1	1	1
Bisektionen zur Trennung der Nullen von U_s und V_s	2	3	3	5	5	5	5
Umlauf in $\frac{\pi}{2}$	3	3	5	7	7	7	7

Die letzten Zeilen beider Tabellen geben den errechneten Beitrag der jeweiligen Kante zur Umlaufzahl von $A(R)$ in Einheiten von $\pi/2$ an. Diese Zeilen stimmen natürlich überein.

3. Ausblick

Als generelles Verfahren zur Berechnung komplexer Nullstellen von Polynomen ist die Intervallmethode wegen ihres exponentiellen Verhaltens in der Nähe von Nullstellenhaufen nicht geeignet; hier ist das symbolische Verfahren vorzuziehen. Es mag aber sein, daß die Intervallmethode unter bestimmten Umständen, etwa bei der Verfeinerung isolierender Rechtecke, Vorzüge hat.

Danksagung

Dem österreichischen Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung danke ich für Unterstützung durch ein Lise-Meitner-Stipendium (M0135-PHY).

4. Literatur

1 George E. Collins, Werner Krandick: An efficient algorithm for infallible complex root isolation. In: Paul S. Wang (ed.): *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 1992, pp. 189-194. ACM Order Department, P.O.Box 64145, Baltimore, MD 21264, Telefon: 1-800 342-6626 oder 1-410 528-4261.

2 Mark J. Schaefer: Precise zeros of analytic functions using interval arithmetic. In: G.F. Corliss, R.B. Kearfott (eds.): *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis with Automatic Result Verification*, 1993. Erscheint in *Interval Computations*.

Anschrift: Dr. Werner Krandick, Research Institute for Symbolic Computation, Universität Linz, A-4040 Linz, Österreich. e-mail: Werner.Krandick@risc.uni-linz.ac.at